TITLE:
Gaps of matrix monotone functions (Theory of Operator Algebras and its Applications)

AUTHOR(S):
富山, 淳

CITATION:
富山, 淳. Gaps of matrix monotone functions (Theory of Operator Algebras and its Applications). 数理解析研究所講究録 2002, 1250: 16-21

ISSUE DATE:
2002-02

URL:
http://hdl.handle.net/2433/41781

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録 1250 巻 2002 年 16-21



# Gaps of matrix monotone functions

東京都立大学名誉教授　　富山　淳 (Jun Tomiyama)
Prof.Emeritus of Tokyo Metropolitan Univ.

## 1 はじめに

区間 $J$ で作用素単調な関数 (operator montone function) の全体を $P(J)$ とする。一方 $J$ 上で特に $n\times n$ 行列環 $M_n$ 上の作用素単調な関数 (matrix monotone of order n) となるもの全体を $P_n(J)$ とかくことにする。定義から $P_n(J)$ は $n$ について単調減少なクラスであるが、J 上の関数が任意の $n$ について $P_n(J)$ に属せばそれは作用素単調関数にほかならないことは良く知られている。

作用素単調な関数は１９３４年に K.Löwner によって提唱されて以来多くの分野に現れる重要な概念として現在も研究されており、最初の段階の基本的な結果は W.Donoghue の本 ([2]) にまとめられている。そしてそこでは関数 $f(x)$ が $P_n(J)$ に属する必要条件および十分条件として次の結果が述べられている。

定理 [7 章、定理 6 と 8 章定理 5]

関数 $f(x)$ が n-marix monotone $(n\geq 2)$ であれば、次のことが成り立つ；

(1) $f$ は $2n-3$ 回連続微分可能，　(2) $f^{2n-3}(x)$ が convex,

(3) 行列　$D_n(t;f)$ が $J$ 上 a.e. で存在して positive semidefinite.

ここで $D_n(x;f)$ は

$$D_n(x;f)=[f^{i+j-1}(x)/i+j-1!]$$

となる $J$ 上の n 次行列関数である。

逆に (1),(3) を満たす関数 $f$　が (2) で更に $f^{2n-3}$ が nonnegative であれば n-marix monotone となる。

そして Donoghue はこの後次のようにのべている (84 頁):

" In the abscence of that theorem (thm.8.5) we would not yet be sure that the classes $P_n(J)$ were all distict as n increases".

しかし、上の行列関数の正値性を判定することはたとえ3次元位でも非常に困難である。実際 Donoghue の本では 1 と 2 の違いのほかは 2 と 3 の違いを示す関数の例すら示されていない。$P_n(J)$ の関数についての議論は上記以外にも多くあり ( 例えば分割不能な n-matrix monotone function) それらの文献には例が示されてはいるが、それらは皆作用素単調関数 (従って確かに ' 例 ' にはなっている ! ) である。そしてこのような事情はそれ以後現在迄の数多くの論文においても同様であり、それらの中でたとえ小さな n についても例を見出せなかった。。

本稿の目的は、従って次の結果を示すことにある。

主定理 A. 任意の $n$ について $J$ 上 n-matrix monotone で, かつ $J$ の任意の部分区間 $I$ 上で $(n+1)$-matrix monotone でない関数が存在する。

本稿での中身は Ji-富山 [4] と目下進行中の F.Hansen,G.Ji と富山による研究　[5] による。

$n$-matrix monotone 性の判定法については、$f$ に1階微分可能性のみを仮定した Löwner の正値性によるものがあるが、この判定法が使えるのは $x^2$ 位でありあまり役にはたたない。

## 2　一つの視点

筆者は上の問題を作用素環上の正値線形写像の multiplicity に発したその重層構造 (matricial structure) の理論 ( Stinespring-Choi(1955-1974) の定理に始まり最近の Effros-Ruan のまとめ [3] まで) の 非線形版 の一面と考えている。この意味で Löwner の作用素単調関数の表現定理は完全正値写像の dilation の定理に対応する。そして、$P_n(J)$ と $P_{n+1}(J)$ の違いは線形版では $n$-正値写像と $n+1$-正値写像との差が対応するであろう。更に同じ意味で Stinespring の論文と同年の 1955 年に小笠原 [7] により次の結果が示されているのは興味深い ;

C*-環 $A$ について、$A$ が可換であることと関数,$x^2$ が区間 $[0,\infty)$ で $A$ 上単調であることとは同値である。

その後この結果は関数が、$x^p$ $(p>1)$ の場合にまで拡張されており更に $e^x$ が単調な場合という characterization ([11]) まででている。しかし作用素単調関数の長い歴史にも拘わらず、これでは議論のレベルは線形

作用素単調関数の長い歴史にも拘わらず、これでは議論のレベルは線形版の Stinespring-Choi の定理に及んでいない。そしてこの視点で対応する結果を示したのが [4] である。即ち、

C*-環 $A$ が可換であることと、$[0,\infty)$ 上で単調な連続関数がすべて $A$ 上で単調であることとは同値である。

上の結果で nontrivial な部分は十分性であるが、それは、上の仮定の下では $A$ は 2 次元以上の既約表現をもてないことを示すと事が鍵であり、この事は $P_1([0.\infty))$ (スカラー単調関数) と $P_2([0,\infty))$ との違いからでてくる。そして、この結果が知られている結果をすべて含むことは $x^2$ (一般には $x^p$ $(p>1)$ や $e^x$ はすべて 2-matrix monotone でないことから言える。定理 $A$ が示されれば当然上の結果の高次元版も考えられる。

ここで単調関数に関する非線形版が線形版と異なっていれば、作用素環の（線形版）重層構造がこちら側から見ると異なっているという劇的な事態が起こることになるが、現実は平凡（?）に重層構造はどちら側から見ても同じになるわけである。

# 3 主定理の証明

証明は次の段階で行う。先ず、$2n-1$ 次の多項式

$$g(x) = a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{2n-1}x^{2n-1}$$

を考える。

(1) $D_n(0;g)$ が positive definite (positive invertible) になるような g が存在することを示す。それには先ずこの g についでは、$D_n(0;g) = [a_{i+j-1}]$ となることに注意する。

今 $a_{2n-1}$ を正とし、更にこの行列の $i$ 行から後の主部分行列

$$\begin{pmatrix} a_{2i-1} & a_{2i} & \cdots & a_n \\ a_{2i} & a_{2i+1} & \cdots & a_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{2n-1} \end{pmatrix}$$

が positive definite であるとすると、次の行列式

$$\begin{vmatrix} a_{2i-3} & a_{2i-2} & \cdots & a_{n-1} \\ a_{2i-2} & a_{2i-1} & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1} & a_n & \cdots & a_{2n-1} \end{vmatrix}$$

においては、$a_{2i-3}$ の係数行列式は仮定より正なので $a_{2i-3}$ をその後の $\{a_k\}_{2i-2}^{2n-1}$ に対して十分に大きくとれば, その値を正にする事が出来る。このようにして、$\{a_k\}_1^{2n-1}$ をきめれば、$D_n(x;g)$ は、後からの主行列式の値がすべて正になるので positive definite になる。

(2) 上の $2n-1$ 次の多項式 $g(x)$ について $D_n(x;g)$ を考えると、その形から $x$ を十分小さく取れば　$D_n(x;g)$ は positive definite になる、即ち
$\exists\alpha > 0$; $[0,\alpha]$ 上で $D_n(x;g)$ は positive definite.

(3) この $g(x)$ について更に $D_{n+1}(x;g)$ を考えると、後からの $3\times 3$ 行列は次の形になる、

$$\begin{pmatrix} a_{2n-3}+(2n-2)a_{2n-2}x+\frac{(2n-1)(2n-2)}{2}a_{2n-1}x^2 & a_{2n-2}+(2n-1)a_{2n-1}x & a_{2n-1} \\ a_{2n-2}+(2n-1)a_{2n-1}x & a_{2n-1} & 0 \\ a_{2n-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

従って、明らかに $[0,\alpha]$ のどの部分区間 をとっても $D_{n+1}(0;g)$ はこの区間上で positive semidefinite にもなり得ない。よって $g$ は $n+1$-matrix monotone ではない。

(4) $[0,\alpha]$ と 与えられた区間 $J$ (の closure) を結ぶ相似変換 $h(x)$ は明らかに作用素単調関数なので

$$f(x) = g(h(x)) \qquad x \in J$$

と置けばこの $f$ が求める gap を示す関数になる。

２と３の差については単位区間 $[0,1]$ 上では

$$g(x) = 6x + x^3$$

がその例であり、$J$ がたとえ無限区間 $[0,\infty)$ のようになっても相似変換を加えた

$$f(x) = 6\left(\frac{x}{x+1}\right) + \left(\frac{x}{x+1}\right)^3$$

が求める例になる。しかし上の証明では与えられた任意の $n \geq 2$ に対して gap を示す explicit な例を示すことは出来ない。またたとえその様な $g(x)$ が一つ求められてもそれについての $\alpha > 0$ の値を正確に求めるのはきわめて困難な問題と思われる。ただ最近 Hankel 行列のモーメントの問題から、任意の $n$ について次の関数 $g(x)$ が求めるものの一つであることが分かった。

$$g(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \ldots + \frac{1}{2n-1}x^{2n-1}.$$

しかし $\alpha$ の値はまだ分かっていない。今後の課題である。

最後に [4] の結果の高次元版として次の定理をのべておく。

定理 B C*-環 $A$ について次は同値である：

(a) $A$ の既約表現は高々 $n$ 次元である、

(b) 区間 $[0, \infty)$ 上の $n$-matrix monotone 関数はすべて $A$ 上で単調である, 即ち

$$P_n(J)|A = P_{n+1}(J)|A = \ldots = P(J)|A,$$

、(c) $A$ より任意の C*-環 $B$ への n-positive 線形写像はすべて $n+1$-positive、従って完全正値になる。

ここで、(a) と (c) の同値性は富山 [10] によるが、線形、非線形を合わせてその C*-環上での characterization が同じ類の C*-環（subhomogeneous C*-環）になっているのは興味深いことと思われる。

# 参考文献


[1] M.Choi, Positive linear maps on C*-algebras, Canad. J. Math., 24(1972),520-529

[2] W.F.Donoghue,Monotone matrix functions and analytic continuation, Springer, 1974

[3] E.G.Effros and Z-J.Ruan, Operator spaces, London Math. Soc. Monograph 23,2000, Oxford

[4] G-X.Ji and J.Tomiyama,On characterizations of commutativity of C*-algebras, preprint

[5] F.Hansen,G-X.Ji and J.Tomiyama, in preparation

[6] K.Löwner, Über monotone Matrixfunktionen, Math. Z. 38 (1934), 177-216

[7] T.Ogasawara, A theorem on operator algebras, J.Sci. Hiroshima Univ. 18(1955), 307-309

[8] G.K.Pedersen, C*-algebras and their automorphism groups, Academic Press 1989

[9] W.F.Stinespring, Positive functions on C*-algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 6(1955), 211-216

[10] J.Tomiyama, On the difference of n-positivity and complete positivity in C*-algebras, J.Funct. Anal., 49(1982),1-9

[11] W.Wu, An order characterization of commutativity of C*-algebras, Proc.Amer. Math. Soc.,129(2001),983-987

Guoxing Ji,Department of Mathematics, Shaanxi Normal University, Xi'an,710062.Peoples Republic of China,

E-mail address: gxji@snnu.edu.cn

Jun Tomiyama, Department of Mathematics, Japan women's University,Tokyo, Japan.

E-mail address:jtomiyama@fc.jwu.ac.jp